

جواب سوال (۱)

* اولاً رابطه بازتابی است زیرا $\frac{a}{a} = 1 \in \mathbb{Z}$

** رابطه متعدی است زیرا:

$$aRb \implies \exists m \in \mathbb{Z} \quad s.t. \quad \frac{a}{b} = m \implies a = mb$$

$$bRc \implies \exists n \in \mathbb{Z} \quad s.t. \quad \frac{b}{c} = n \implies b = nc$$

لذا می توان گفت:

$$a = m(nc) = (mn)c$$

چون $m, n \in \mathbb{Z}$ در نتیجه $mn \in \mathbb{Z}$ و لذا aRc .

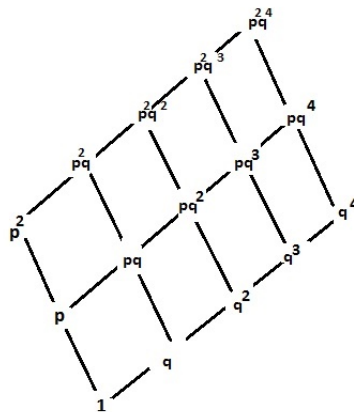
*** رابطه خاصیت تقارنی ندارد زیرا $1 \nmid 2$ در حالیکه $2 \mid 1$

**** رابطه ضد تقارنی است، زیرا اگر:

$$aRb \implies \exists n \in \mathbb{Z} \quad s.t. \quad \frac{a}{b} = n$$

اگر bRa حتماً بایستی $\frac{b}{a} = \frac{1}{n} \in \mathbb{Z}$ در نتیجه $\frac{1}{n} = 1$ ، یعنی $n = 1$ در نتیجه $a = b$.

جواب سوال (۲)



با استفاده از نمودار هاس می توان مشاهده کرد که از عضو ۱ به p ، از عضو p به p^2 جمعاً دو یال وجود دارد. به همین ترتیب از ۱ تا q^4 جمعاً ۴ یال وجود دارد. بنابراین برای $p^m q^n$ تعداد $m + n$ یال از ۱ وجود خواهد داشت. در مورد رئوس میانی تعداد mn تا راس میانی داریم که هر کدام دارای ۲ یال هستند در نتیجه $2mn$ تا یال خواهیم داشت. لذا تعداد کل یال ها برابر است با: $m + n + 2mn$

جواب سوال (۳)

الف) تعداد کل رئوس برابر است با: $6n = 2n + 3n + n$ و از آنجایی که تعداد یال های درخت دقیقاً از تعداد رئوس یکی کمتر است لذا تعداد کل یال های درخت برابر است با $6n - 1$. از طرفی داریم:

$$2|E| = \sum \deg(v_i) \implies 2(6n - 1) = 2n + 2(3n) + n \implies n = \frac{2}{3}$$

■ داد های مساله نادرست است و دانشجو می بایست با داده های نادرست به جواب ناصحیح برسد

ب) می دانیم که $\bar{G} \cup G = K_n$ و بنابراین $\frac{n(n-1)}{2} = \bar{E} \cup E$ لذا:

$$40 + 80 = 120 = \frac{n(n-1)}{2} \implies n = 16$$

ادامه در صفحه دوم

جواب سوال ۴

حل رابطه بازگشتی همگن $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$

$$a_n = r^n \Rightarrow r^n - 5r^{n-1} + 6r^{n-2} = 0 \Rightarrow r^{n-2}(r^2 - 5r + 6) = 0 \\ \Rightarrow r_1 = 2, r_2 = 3$$

بنابراین جواب عمومی رابطه بازگشتی همگن عبارتست از:

$$a_n^{(h)} = c_1(2)^n + c_2(3)^n$$

جمله ناهمگن به صورت $f(n) = (2)^n$ ، از طرفی ۲ ریشه معادله مشخصه است لذا با جواب خصوصی به فرم زیر است:

$$a_n^{(p)} = An(2)^n$$

لذا جواب کلی رابطه بازگشتی به صورت زیر می باشد:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c_1(2)^n + c_2(3)^n + An(2)^n$$

برای یافتن A جواب خصوصی را در رابطه بازگشتی اولیه قرار می دهیم،

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 2^n$$

$$An(2)^n - 5A(n-1)(2)^{n-1} + 6A(n-2)(2)^{n-2} = 2^n$$

$$2^{n-2}(An(2)^2 - 5A(n-1)(2) + 6A(n-2)) = 2^{n-2}(2^2)$$

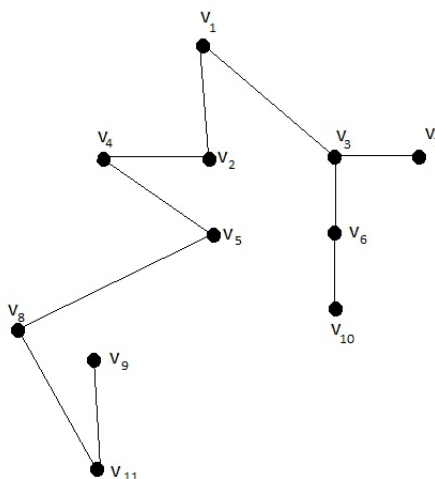
$$4An - 10A(n-1) + 6A(n-2) = 4 \Rightarrow 4An - 10An + 10A + 6An - 12A = 4$$

$$\Rightarrow -2A = 4 \Rightarrow A = -2$$

بنابراین $a_n = c_1(2)^n + c_2(3)^n - 2n(2)^n$ ، از شرایط اولیه داریم:

$$\begin{cases} a_0 = 7 = c_1 + c_2 \\ a_1 = 1 = 2c_1 + 3c_2 - 4 \\ c_1 = 16, c_2 = -9 \\ a_n = 16(2)^n - 9(3)^n - 2n(2)^n \end{cases}$$

جواب سوال ۵



دانشجو بایستی که مراحل رسم درخت فراگیر را مرحله به مرحله نوشته باشد.